Divisão de distribuições temperadas por polinômios

Mariana Smit Vega Garcia
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da FAPESP.

guingues@gmail.com

29 de agosto de 2008

Introdução

Após o desenvolvimento da Teoria das Distribuições por Schwartz, em 1950, surgiu a seguinte

Questão:

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $S \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$, existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega) : fT = S$?

Introdução

Após o desenvolvimento da Teoria das Distribuições por Schwartz, em 1950, surgiu a seguinte

Questão:

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $S \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$, existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega) : fT = S$?

Este resultado é claramente falso: basta considerar f que se anula em um aberto $U \subseteq \Omega$ e S que não se anula nesse aberto.

Introdução

Após o desenvolvimento da Teoria das Distribuições por Schwartz, em 1950, surgiu a seguinte

Questão:

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $S \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$, existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega) : fT = S$?

Este resultado é claramente falso: basta considerar f que se anula em um aberto $U \subseteq \Omega$ e S que não se anula nesse aberto.

E se f se anular somente em um ponto de Ω?

Introdução

Ainda assim o resultado é, em geral, falso.
Seja $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Introdução

Ainda assim o resultado é, em geral, falso.
Seja $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Não existe $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : fT = 1$.
Se tal T existisse, teríamos que $T_{|_{(0,\infty)}} = e^{\frac{1}{x^2}}$, o que não é possível.

Introdução

Em 1932 Hadamard estudou as seguintes funções, para $a \in \mathbb{C}$:

$$x_+^a = \begin{cases} x^a, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se $\mathrm{Re}(a) > -1$, então $x_+^a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Através de continuação analítica é possível dar significado para x_+^a, para todo $a \in \mathbb{C}$.

Introdução

- Em 1956 Schwartz provou que vale a divisão se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ é uma função não nula e holomorfa em cada uma de suas variáveis.

Introdução

- Em 1956 Schwartz provou que vale a divisão se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ é uma função não nula e holomorfa em cada uma de suas variáveis.
- Em 1958 Lojasiewicz provou que vale a divisão se f é uma função real analítica não nula.

Introdução

- Em 1956 Schwartz provou que vale a divisão se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ é uma função não nula e holomorfa em cada uma de suas variáveis.
- Em 1958 Lojasiewicz provou que vale a divisão se f é uma função real analítica não nula.
- No mesmo período Hörmander provou que vale a divisão se f é um polinômio não nulo em $\mathbb{R}^n$.

Introdução

- Em 1956 Schwartz provou que vale a divisão se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ é uma função não nula e holomorfa em cada uma de suas variáveis.
- Em 1958 Lojasiewicz provou que vale a divisão se f é uma função real analítica não nula.
- No mesmo período Hörmander provou que vale a divisão se f é um polinômio não nulo em $\mathbb{R}^n$.
- As provas de Hörmander e Lojasiewicz se baseiam num mesmo lema algébrico.

Principal resultado

Teorema 1

Seja P um polinômio não-nulo em n variáveis. Então a aplicação multiplicação (injetora)

$$\mathcal{S} \ni f \longmapsto Pf \in \mathcal{S}$$

tem uma inversa contínua (definida na sua imagem), isto é, dada uma semi-norma contínua $\mathcal{R}$ definida em $\mathcal{S}$ existe uma semi-norma contínua $\mathcal{Q}$ definida em $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{R}(f) \leq \mathcal{Q}(Pf)$, $\forall f \in \mathcal{S}$.

▸ Lema ▸ Teorema 2

Corolário

Teorema 2

Dada $T \in \mathcal{S}'$ existe $S \in \mathcal{S}'$ tal que $PS = T$.

Corolário

Teorema 2

Dada $T \in \mathcal{S}'$ existe $S \in \mathcal{S}'$ tal que $PS = T$.

Prova

Dada $T \in \mathcal{S}'$, considere

$$P\mathcal{S} \ni Pf \longmapsto T(f). \tag{1}$$

▸ Teorema 1 $\Rightarrow$ (1) é contínua: $Pf_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \overset{\text{teo}}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \Rightarrow T(f_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$.
Hahn-Banach: $\exists$ extensão contínua de (1) a $\mathcal{S}$. Se $S \in \mathcal{S}'$ é tal extensão, $PS = T$.

Corolário

Teorema 3

Sejam $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes não nulo e $T \in \mathcal{S}'$. Então $\exists S \in \mathcal{S}'$:

$$P(D)S = T.$$

Em particular, sempre existe solução fundamental temperada de $P(D)$, isto é, existe $S \in \mathcal{S}' : P(D)S = \delta$.

Corolário

Teorema 3

Sejam $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes não nulo e $T \in \mathcal{S}'$. Então $\exists S \in \mathcal{S}'$:

$$P(D)S = T.$$

Em particular, sempre existe solução fundamental temperada de $P(D)$, isto é, existe $S \in \mathcal{S}' : P(D)S = \delta$.

Prova

Objetivo: resolver $P(D)S = T$ em $\mathcal{S}'$.

Corolário

Teorema 3

Sejam $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes não nulo e $T \in \mathcal{S}'$. Então $\exists S \in \mathcal{S}'$:

$$P(D)S = T.$$

Em particular, sempre existe solução fundamental temperada de $P(D)$, isto é, existe $S \in \mathcal{S}' : P(D)S = \delta$.

Prova

Objetivo: resolver $P(D)S = T$ em $\mathcal{S}'$.
Aplicando a transformada de Fourier: $P(\xi)\hat{S} = \hat{T}$

Corolário

Teorema 3

Sejam $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes não nulo e $T \in \mathcal{S}'$. Então $\exists S \in \mathcal{S}'$:

$$P(D)S = T.$$

Em particular, sempre existe solução fundamental temperada de $P(D)$, isto é, existe $S \in \mathcal{S}' : P(D)S = \delta$.

Prova

Objetivo: resolver $P(D)S = T$ em $\mathcal{S}'$.
Aplicando a transformada de Fourier: $P(\xi)\hat{S} = \hat{T}$
Teorema 2 $\Rightarrow \exists u \in \mathcal{S}' : P(\xi)u = \hat{T}$.

Corolário

Teorema 3

Sejam $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes não nulo e $T \in \mathcal{S}'$. Então $\exists S \in \mathcal{S}'$:

$$P(D)S = T.$$

Em particular, sempre existe solução fundamental temperada de $P(D)$, isto é, existe $S \in \mathcal{S}' : P(D)S = \delta$.

Prova

Objetivo: resolver $P(D)S = T$ em $\mathcal{S}'$.
Aplicando a transformada de Fourier: $P(\xi)\hat{S} = \hat{T}$
Teorema 2 $\Rightarrow \exists u \in \mathcal{S}' : P(\xi)u = \hat{T}$.
Defina $S = \mathcal{F}^{-1}(u)$.

Corolário para distribuições

O teorema de Lojasiewicz, quando f é um polinômio, segue do teorema de Hörmander.

Corolário para distribuições

O teorema de Lojasiewicz, quando f é um polinômio, segue do teorema de Hörmander.

Teorema 3

Sejam T uma distribuição definida num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e P um polinômio não nulo em n variáveis. Então existe uma distribuição S definida em Ω tal que $PS = T$.

Passos para a demonstração

- Teorema de Seidenberg-Tarski

Passos para a demonstração

- Teorema de Seidenberg-Tarski
- Teorema de Puiseux

Passos para a demonstração

- Teorema de Seidenberg-Tarski
- Teorema de Puiseux
- Teorema da Extensão de Whitney

Passos para a demonstração

- Teorema de Seidenberg-Tarski
- Teorema de Puiseux
- Teorema da Extensão de Whitney
- O argumento de L. Hörmander

Teorema de Seidenberg-Tarski

Definição

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **semi-algébrico** se ele puder ser escrito como uma reunião finita de intersecções finitas de conjuntos do tipo:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0\},$$

onde P e Q são polinômios.

Teorema de Seidenberg-Tarski

Definição

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **semi-algébrico** se ele puder ser escrito como uma reunião finita de intersecções finitas de conjuntos do tipo:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0\},$$

onde P e Q são polinômios.

Seidenberg-Tarski

Se $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ é semi-algébrico, então a projeção de A em $\mathbb{R}^m$ também é um conjunto semi-algébrico.

Corolário

Definição

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : E \to \mathbb{R}$ é **semi-algébrica** se $F = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y \leq g(x)\}$ é semi-algébrico.

Corolário

Definição

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : E \to \mathbb{R}$ é **semi-algébrica** se $F = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y \leq g(x)\}$ é semi-algébrico.

Corolário

$E \subseteq \mathbb{R}^{2+n}$: semi-algébrico.

$$f(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}^n : (x, y, z) \in E\}$$

é semi-algébrica.

Teorema de Puiseux

Teorema de Puiseux

Seja f uma função contínua, definida para $\xi \in \mathbb{R}$ positivo pequeno, tal que $y = f(\xi)$ satisfaz

$$A_0(\xi)y^n + A_1(\xi)y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(\xi)y + A_n(\xi) = 0,$$

onde os coeficientes $A_0(\xi), \ldots, A_n(\xi)$ são funções analíticas em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}$. Então existem $p, q \in \mathbb{N}$: a restrição de f a $(0, \varepsilon)$ (para algum $\varepsilon > 0$) pode ser escrita como

$$\xi^q f(\xi) = g(\xi^{\frac{1}{p}}),$$

onde g é uma função analítica em um intervalo pequeno em torno da origem em $\mathbb{R}$.

Expressão de f

Se $g(\xi) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j \xi^j$, $m \in \mathbb{N}$, então

Expressão de f

Se $g(\xi) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j \xi^j$, $m \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \xi^{-q} \sum_{j=m}^{\infty} c_j (\xi^{\frac{1}{p}})^j \\ &= \sum_{k=m-pq}^{\infty} c_{k+pq} (\xi^{\frac{1}{p}})^k \\ &= c_m \xi^r (1 + \mathrm{o}(1)), \end{aligned}$$

Assim $\frac{c_m}{2}\xi^r \leq f(\xi) \leq \frac{3c_m}{2}\xi^r$, para ξ pequeno.

Relação entre Seidenberg-Tarski e Puiseux

Proposição

Seja f semi-algébrica em $(0, \infty)$ e finita para x pequeno. Então $f_{|_{(\mathbf{0},\varepsilon)}} = g$, onde g é contínua e $y = g(x)$ satisfaz uma equação do tipo

$$P_n(x)y^n + \ldots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

onde os P_j são polinômios.

Relação entre Seidenberg-Tarski e Puiseux

Proposição

Seja f semi-algébrica em $(0, \infty)$ e finita para x pequeno. Então $f_{|_{(0,\varepsilon)}} = g$, onde g é contínua e $y = g(x)$ satisfaz uma equação do tipo

$$P_n(x)y^n + \ldots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

onde os P_j são polinômios.

Assim, existem $c \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Q}$:

$$f(x) = cx^q(1 + \mathrm{o}(1)).$$

Lema algébrico fundamental

Lema

Q é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{N} = Q^{-1}(\{0\})$. Se $\mathcal{N} \cap B_1[0] \neq \emptyset$, $\exists c, \mu > 0$:

$$c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^{\mu} \leq |Q(\xi)|, \forall |\xi| \leq 1.$$

▸ Resultado parcial

Lema algébrico fundamental

Lema

Q é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{N} = Q^{-1}(\{0\})$. Se $\mathcal{N} \cap B_1[0] \neq \emptyset$, $\exists c, \mu > 0$:

$$c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu \leq |Q(\xi)|, \forall |\xi| \leq 1.$$

▸ Resultado parcial

Prova

Dado $\delta > 0$, por Seidenberg-Tarski, a função

$$T(\delta) = \inf\{|Q(\xi)| : |\xi| \leq 1,\ \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta\},$$

é semi-algébrica. Logo, $\exists \delta_0 > 0$ e polinômios a_j: se $0 < \delta < \delta_0$, $a_m(\delta) T(\delta)^m + a_{m-1}(\delta) T(\delta)^{m-1} + \ldots + a_0(\delta) = 0$. Puiseux $\Rightarrow$ $\exists c, \mu > 0 : c\delta^\mu \leq T(\delta) \Rightarrow c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu \leq T(\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})) \leq |Q(\xi)|$.

Teorema da Extensão de Whitney

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado. $\exists$ aplicação linear $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$:

- $D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m$, $\forall \xi \in A$.

Teorema da Extensão de Whitney

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado. $\exists$ aplicação linear $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$:

- $D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m$, $\forall \xi \in A$.
- $\exists K > 0 : |g|_{m,\xi} \leq K|f|_{m,A_\xi}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema da Extensão de Whitney

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado. $\exists$ aplicação linear $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$:

- $D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m$, $\forall \xi \in A$.
- $\exists K > 0 : |g|_{m,\xi} \leq K|f|_{m,A_\xi}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

$|g|_{m,\xi} = \sup_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha g(\xi)|$,
$A_\xi = B_R[\xi] \cap A$, ($R = R(N)$ é constante),
$|f|_{m,A_\xi}$ é o supremo dos valores $|D^\alpha f(\eta)|$ e $\frac{|R_m^{(\alpha)}(\zeta,\eta)|}{|\zeta-\eta|^{m-|\alpha|}}$, onde $|\alpha| \leq m$, $\zeta, \eta \in A_\xi$ e $\zeta \neq \eta$.

Desigualdade essencial

Sejam P um polinômio de grau $\mu > 0$,
$\mathcal{N}^k = \cap_{|\alpha|<k}\{\xi \in \mathbb{R}^N : P^{(\alpha)}(\xi) = 0\}$.

$$\emptyset = \mathcal{N}^{\mu+1} \subseteq \mathcal{N}^{\mu} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{N}^2 \subseteq \mathcal{N}^1 \subseteq \mathcal{N}^0 = \mathbb{R}^N.$$

Desigualdade essencial

Sejam P um polinômio de grau $\mu > 0$,
$\mathcal{N}^k = \cap_{|\alpha|<k}\{\xi \in \mathbb{R}^N : P^{(\alpha)}(\xi) = 0\}$.

$$\emptyset = \mathcal{N}^{\mu+1} \subseteq \mathcal{N}^{\mu} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{N}^2 \subseteq \mathcal{N}^1 \subseteq \mathcal{N}^0 = \mathbb{R}^N.$$

A idéia é provar por indução para k decrescente a seguinte afirmação:

Lema

Para todos $n, m, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq \mu + 1$, existem $n', m' \in \mathbb{N}$ e $K > 0$:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m',\xi}, \ \forall f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N).$$

Retorno1 Retorno2 Fim

Observações

Observação

O ▸ lema é verdadeiro se $k = \mu + 1$, e $n, m \in \mathbb{N}$ são quaisquer.

Observações

Observação

O lema é verdadeiro se $k = \mu + 1$, e $n, m \in \mathbb{N}$ são quaisquer.

Lema

A afirmação do lema com $k = 0$ implica o teorema. Além disso, o teorema implica que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ existem $m', n' \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva K tais que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m,(\mathcal{N}^0)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m',\xi}, \; \forall f \in \mathcal{S}.$$

Se $k = 0$,

$(\mathcal{N}^0)_\xi = B_R[\xi] \Rightarrow \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^n |f|_{m,\xi} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^n |f|_{m,(\mathcal{N}^0)_\xi}$

Resultado parcial

Teorema

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, existem constantes $n' \in \mathbb{N}$, $K > 0$ e $m' = m'(m)$ tais que para toda $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ que se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m',\xi}.$$

Resultado parcial

Teorema

Dados $n, m \in \mathbb{N}$, existem constantes $n' \in \mathbb{N}$, $K > 0$ e $m' = m'(m)$ tais que para toda $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ que se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m',\xi}.$$

O resultado essencial para a prova deste Teorema é o ▸ Lema algébrico

Prova do caso geral

Enunciado

Seja $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$. Por Whitney existe $g \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ tal que $D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi)$, $\forall \xi \in \mathcal{N}^{k+1}$, $\forall |\alpha| \leq m'$ e

$$|g|_{m',\xi} \leq K_1 |f|_{m',(\mathcal{N}^{k+1})_\xi}, \; \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Já vimos:
$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^n |f-g|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^{n'} |P(f-g)|_{m',\xi}$.

$$\begin{aligned} \sup(1+|\xi|)^n |f|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} \leq& \\ & \sup(1+|\xi|)^n |f-g|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} + \sup(1+|\xi|)^n |g|_{m,(\mathcal{N}^k)_\xi} \\ & \leq C\big(\underbrace{\sup(1+|\xi|)^{n'} |Pf|_{m',\xi}}_{OK} + \underbrace{\sup(1+|\xi|)^{n'+\mu} |g|_{m',\xi}}_{\text{Whitney + indução}}\big). \end{aligned}$$

Referências

- ATIYAH, M.F. *Resolution of singularities and division of distributions*. Communications on pure and applied mathematics vol. 23, p. 145-150, 1970.
- LIMA, E.L. *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- GRAUERT, H. *Several complex variables*. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- GRAUERT, H., FRITZSCHE, K. *Several Complex Variables*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- HÖRMANDER, L. *The analysis of linear partial differential operators I: distribution theory and Fourier analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- HÖRMANDER, L. *The anaylsis of linear partial differential operators II: differential operators with constant coefficients*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- HÖRMANDER, L. *On the division of distributions by polynomials*. Arkiv för Matematik, vol.3, n.53, p.555-568, 1958.
- KRANTZ, S.G. *A primer of analytic functions*. Basel: Birkhäuser, 1992. Puiseux series and Separate real analyticity, p. 80-87. (Baster Lehrbücher, 4).
- LOJASIEWICZ, S. *Sur le problème de la division*. Studia Mathematica, vol. 28, p. 87-136, 1959.
- SCHWARTZ, L. *Division par une fonction holomorphe sur une varieté analytique complexe*. Summa Brasil. Math, vol. 3, p. 181-209, 1955.
- STEIN, E.M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton: Princeton University Press, 1970.
- TREVES, F. *Hypo-analytic structures: local theory*. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- TREVES, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Mineola: Dover, 1995.
- VILLARREAL ALVARADO, F. *Teorema de Seidenberg-Tarski e algumas de suas aplicações às equações diferenciais parciais lineares*. São Paulo, 1978. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.