Convergência das Séries de Fourier

Mariana Smit Vega Garcia[1]

Resumo

Neste trabalho apresentaremos as diversas noções de convergência para as Séries de Fourier através da análise dos diferentes núcleos integrais que surgem no estudo.

1 Introdução

Foi no célebre tratado *Théorie Analytique de la chaleur (1822)*, de Jean Baptiste Joseph Fourier, que a questão de se representar uma função periódica por uma série de funções trigonométricas foi pela primeira vez colocada claramente. Naquele momento o desenvolvimento da Análise Matemática estava ainda insipiente e o estudo da convergência de tais séries não foi abordado com profundidade.

Durante o século XIX grandes matemáticos, entre eles Cauchy, Bolzano e Dirichlet dedicaram esforços à compreensão das séries trigonométricas, agora chamadas *Séries de Fourier*, e o advento da Integral de Lebesgue, no início do século XX, permitiu a Lusin, em 1913, enunciar sua famosa conjectura: *se f é uma função periódica e de quadrado integrável sobre cada intervalo de comprimento igual a seu período, então sua série de Fourier converge para f em quase todo ponto.*

Neste trabalho apresentaremos alguns resultados de convergência para as séries de Fourier. Mencionaremos a convergência em L^2, a convergência pontual para funções absolutamente contínuas e apresentaremos os Teoremas de Fejer e Abel (cf. seção 4). O ponto central da exposição é evidenciar a importância do uso dos núcleos integrais para o estudo da convergência

[1]Bolsista de Iniciação Científica da FAPESP, processo 05/50187-3. Projeto desenvolvido sob a orientação do Prof. Paulo Domingos Cordaro no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

e mostrar que, no caso desses dois últimos resultados, a positividade dos núcleos torna as demonstrações bem mais simples.

Concluímos esta introdução mencionando que, em 1966, o matemático sueco Lennart Carleson provou, em um profundo artigo [4], a validade da conjectura de Lusin. Neste trabalho novas técnicas de Análise Harmônica foram introduzidas, técnicas estas que tiveram aplicação na abordagem de outras problemas. O teorema de Carleson foi estendido para $f \in L^p$, $1 < p < 2$ por Richard Hunt em 1967 [5].

2 Séries de Fourier

Para definir a série de Fourier de uma função, observemos inicialmente que se considerarmos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, então

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}$$

define uma função contínua e periódica de período T. Dada uma seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos podemos considerar, então, a soma formal

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2\pi}{T}inx}. \tag{1}$$

Qualquer soma desse tipo chama-se série de Fourier de período T. Os termos a_n são chamados *coeficientes da série de Fourier* de (1).

Verifica-se sem dificuldade que se $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi inx/T}$, então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-2\pi inx/T}dx$.

Dado $1 \leq p \leq \infty$, vamos definir $L^p_{per,T}$ como sendo o espaço de todas as funções mensuráveis e periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de período T, tais que [2]

$$\|f\|_p \doteq \left\{\int_0^T |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty. \tag{2}$$

Dada $f \in L^p_{per,T}$, definimos seus coeficientes de Fourier pela fórmula

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{\frac{-2\pi}{T}inx}dx,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

[2]Como é usual, identificamos funções que coincidem quase sempre.

A pergunta natural a se fazer é quando $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/T}$, a série de Fourier de uma função integrável f, converge em algum sentido para f.

Um teorema clássico, que pode ser demonstrado usando resultados básicos da teoria dos espaços de Hilbert, é o seguinte:

Teorema 2.1 *Seja $f \in L^2_{per,T}$. Então sua série de Fourier converge para f em $L^2_{per,T}$.*

A fórmula de Parseval, facilmente obtida a partir do teorema anterior, afirma que se $f \in L^2_{per,T}$, então

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx = T \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Em outras palavras, a aplicação $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma isometria (a menos de uma constante) entre os espaços de Hilbert $L^2_{per,T}$ e $\ell^2(\mathbb{Z})$.

3 Convergência pontual

Se $f \in L^1_{per,T}$ não se tem, em geral, $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Um resultado mais fraco é porém verdadeiro e muito útil:

Teorema 3.1 *(Lema de Riemann) Se $f \in L^1_{per,T}$ então $\hat{f}(n) \to 0$ quando $|n| \to \infty$.*

Dada $f \in L^1_{per,T}$, definamos

$$S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e^{\frac{2\pi}{T}inx} = \int_0^T f(y)D_{N,T}(x-y)dy, \quad N \in \mathbb{N} \tag{4}$$

onde

$$D_{N,T}(x) = \frac{\frac{1}{T}\mathrm{sen}\,(\frac{2\pi}{T}(N+\frac{1}{2})x)}{\mathrm{sen}\,(\frac{\pi x}{T})}$$

é chamado *núcleo de Dirichlet.*

As propriedades fundamentais do núcleo de Dirichlet estão resumidas no seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Valem as seguintes afirmações:*

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_{N,T}(x)dx = 1. \tag{5}$$

$$\|D_{N,T}\|_1 \approx \frac{4}{\pi^2}\log N. \tag{6}$$

Indiquemos por $\mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas e de período T em $\mathbb{R}$ com a norma induzida por $L^\infty_{per,T}$. Como conseqüência de (6) temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Existe uma função $f \in \mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R})$ tal que $S_N(f)(0)$ não converge para $f(0)$ quando $N \to \infty$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que o teorema é falso. Definamos, para cada $N \in \mathbb{N}$, o funcional linear $\Lambda_N : \mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ por

$$\Lambda(f) = S_N(f)(0) = \int_0^T f(x)D_{N,T}(x)dx.$$

Claramente Λ_N é contínuo. Além disso, não é difícil mostrar que $\|\Lambda_N\| = \|D_{N,T}\|_1$. Por hipótese, para cada f, $\{\Lambda_N(f) : N \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ é limitado. Assim sendo, como $\mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach, o princípio da limitação uniforme implica que $\{\|\Lambda_N\| : N \in \mathbb{N}\}$ é limitado, o que é um absurdo em virtude de (6). $\square$

Como mencionado na Introdução, a questão da convergência pontual para a série de Fourier de uma função f é delicada. A dificuldade principal advém do fato que $D_{N,T}$ muda de sinal. Para obtermos convergência pontual para funções contínuas, condições de regularidade adicionais devem ser impostas. Para isso introduzimos as seguintes notações: se f é tal que, para um dado x, existem $f(x^+)$ e $f(x^-)$, introduzimos, para $h > 0$:

$$f_-(y) = \begin{cases} f(y) & x-h \le y < x \\ f(x^-) & y = x, \end{cases} \qquad f_+(y) = \begin{cases} f(y) & x < y \le x+h \\ f(x^+) & y = x, \end{cases}$$

Teorema 3.3 *Seja $f \in L^1_{per,T}$. Suponha que exista $h > 0$ pequeno tal que $f_- \in AC([x-h,x])$ e $f_+ \in AC([x,x+h])$. Então $S_N(f)(x) \to \frac{1}{2}\{f(x^+) + f(x^-)\}$, onde $f(T^+) = f(0^+)$ e $f(0^-) = f(T^-)$. Em particular, se $f \in AC([x-h,x+h])$ então $S_N(f)(x) \to f(x)$.*

*Demonstração:*Veremos que $\int_x^{x+\frac{T}{2}} f(y)D_{N,T}(x-y)dy \to \frac{1}{2}f(x^+)$; para tal mostraremos que $I^{(N)} = \int_x^{x+\frac{T}{2}}(f(y)-f(x^+))D_{N,T}(y-x)dy \to 0$. Seja $0<\delta<\min\{\frac{T}{2},h\}$. Então: $I^{(N)} = I_1^{(N)} + I_2^{(N)}$, onde

$$I_1^{(N)} = \int_x^{x+\delta}(f(y)-f(x^+))D_{N,T}(y-x)dy,$$

$$I_2^{(N)} = \int_{x+\delta}^{x+\frac{T}{2}}(f(y)-f(x^+))D_{N,T}(y-x)dy.$$

Temos que $I_2^{(N)} = \int_{x+\delta}^{x+\frac{T}{2}} g(y)\mathrm{sen}\,(\frac{2\pi}{T}(N+\frac{1}{2})(y-x))dy$, onde

$$g(y) \doteq \frac{f(y)-f(x^+)}{T\mathrm{sen}\,(\frac{\pi}{T}(y-x))}$$

é integrável. Pelo Teorema 3.1, $I_2^{(N)} \to 0$.

Definindo

$$g_N(y) = \frac{\mathrm{sen}\,(\frac{2\pi}{T}(N+\frac{1}{2})(y-x))}{y-x},\ \ h(y) = \frac{(f_+(y)-f(x^+))(y-x)}{T\mathrm{sen}\,(\frac{\pi}{T}(y-x))},$$

obtemos:

$$I_1^{(N)} = \int_x^{x+\delta} h(y)g_N(y)dy.$$

Por hipótese, $h \in AC([x,x+\delta])$ e $h(x)=0$. Dessa forma podemos integrar por partes, obtendo:

$$|I_1^{(N)}| \le |h(x+\delta)G_N(x+\delta)| + \sup_{t\in[x,x+\delta]}|G_N(t)|\int_x^{x+\delta}|h'(t)|dt,$$

onde $G_N(u) = \int_x^u g_n(s)ds$, para $u\in[x,x+\delta]$.

Não é difícil mostrar que existe M tal que $\|G_N\|_\infty \le M$, para todo $N\in\mathbb{N}$, e portanto $|I_1^{(N)}| \le M|h(x+\delta)| + M\int_x^{x+\delta}|h'(t)|dt \to 0$ quando $\delta\to 0$, uniformemente em N, em virtude do Teorema da Convergência Dominada (h' é integrável!).

Podemos agora concluir a demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$ tal que $I_1^{(N)} < \frac{\varepsilon}{2}$ uniformemente em N. Escolhendo n_0 tal que $I_2^{(N)} < \frac{\varepsilon}{2}$, se $N \geq n_0$, concluiremos que $I^{(N)} < \varepsilon$. Uma demonstração análoga mostra que $\int_{x-\frac{T}{2}}^{x} f(y) D_{N,T}(x-y)dy \to \frac{1}{2} f(x^-)$, de onde segue o resultado. $\square$

4 Convergências de Fejer e Abel

A importância dessa seção está em se notar que mudando a noção de convergência podemos obter núcleos *positivos* muito mais simples para trabalhar.

Consideremos $f \in L^1_{Per,T}$ e definamos:

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}(S_0(f) + ... + S_N(f)) = \int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}} f(y) F_{N,T}(x-y)dy,$$

onde

$$F_{N,T}(z) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_{n,T}(z) = \frac{1}{T(N+1)} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\pi(N+1)z/T)}{\operatorname{sen}(\pi z/T)} \right\}^2 \tag{7}$$

é chamado *núcleo de Fejer.*

Proposição 4.1 *O núcleo de Fejer satisfaz as seguintes propriedades para $0 < \varepsilon < \frac{T}{2}$:*

$$F_{N,T} \geq 0, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_{N,T} = 1. \tag{8}$$

$$\int_{\frac{-T}{2}}^{-\varepsilon} F_{N,T}(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{T}{2}} F_{N,T}(x)dx \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{9}$$

Como conseqüência disso temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Se f é uma função contínua em x e $f \in L^\infty_{per,T}$ então $\sigma_{N,T}(f)(x) \to f(x)$ quando $N \to \infty$.*

Demonstração: Seja M tal que $|f(y)| \leq M$ para quase todo y. Pela continuidade de f em x, dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < \frac{T}{2}$ tal que se $|x-y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por (9), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $N \geq n_0$, então $\int_{\frac{-T}{2}}^{-\delta} F_{N,T}(x)dx + \int_{\delta}^{\frac{T}{2}} F_{N,T}(x)dx < \frac{\varepsilon}{4M}$. Seja $N \geq n_0$. Então:

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| = \left| \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(x-y) - f(x)) F_{N,T}(y)dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{\frac{-T}{2}}^{-\delta} |f(x-y) - f(x)| F_{N,T}(y)dy + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| F_{N,T}(y)dy +$$

$$+ \int_{\delta}^{\frac{T}{2}} |f(x-y) - f(x)| F_{N,T}(y)dy < 2M \int_{\frac{-T}{2}}^{-\delta} F_{N,T}(y)dy +$$

$$+ \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| F_{N,T}(y)dy + 2M \int_{\delta}^{\frac{T}{2}} F_{N,T}(y)dy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} F_{N,T}(x)dx < \varepsilon. \qquad \square$$

Corolário 4.1 *Se $f \in \mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R})$ então $\sigma_{N,T}$ converge uniformemente para f. Em particular toda $f \in \mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R})$ é limite uniforme de polinômios trigonométricos (Teorema de Weierstrass Trigonométrico).*

Analogamente podemos estudar, para uma dada $f \in L^1_{Per,T}$, a existência do limite (convergência no sentido de Abel)

$$(10) \qquad \lim_{R \nearrow 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) R^{|n|} e^{\frac{2\pi}{T} inx}.$$

Para isto somos levados agora a considerar o *núcleo de Poisson* dado por

$$(11) \qquad \mathcal{P}_{R,T}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} R^{|n|} e^{\frac{2\pi}{T} inx} = \frac{1}{T} \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(2\pi x/T) + R^2},$$

a partir do qual obtemos para $\mathcal{P}_{R,T}$ um resultado análogo aquele dado pela Proposição 4.1 para o núcleo de Fejer, onde agora (9) deve ser substituído por:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P_{R,T} \to 1 \quad \text{quando } R \to 1^-.$$

Um raciocínio análogo ao da demonstração do Teorema 4.1 permite obter o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *: Seja* $f \in \mathcal{C}_{per,T}(\mathbb{R})$*. Então* $P_R(f)$ *converge uniformemente para* f *quanto* $R \to 1^-$*.*

Observação: É curioso observar que (11), para $T = 2\pi$, define o núcleo que fornece a solução do problema de Dirichlet para o operador de Laplace em $\mathbb{R}^2$ no disco unitário. Tal fato, porém, não surpreende e está conectado à teoria dos espaços de Hardy, teoria esta que será objeto de estudos posteriores dentro desse projeto.

Referências

[1] DE FIGUEIREDO, D.G. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977. (Projeto Euclides)

[2] HONIG, C.S. Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville. 2a ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1971. (Monografias de matemática, 9).

[3] SUSSMAN, H. Notas de aula das disciplinas "Real Analysis I,II", 1980/1981. Rutgers University (elaboradas por Paulo Domingos Cordaro).

[4] CARLESON, L. Convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math, 116 (1966), 135-157.

[5] HUNT, R.A. On the convergence of Fourier series. Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues. Proc. Conf. Edwardsville. I11 (1967), 235-255. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, I11. (1968).