Os Teoremas de Seidenberg-Tarski e de Puiseux

Mariana Smit Vega Garcia[1]

[1]Bolsista de Mestrado da FAPESP, processo número 06/53020-5. Projeto desenvolvido sob a orientação do Prof. Paulo Domingos Cordaro no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

1 Introdução

Neste trabalho apresentaremos os teoremas de Seidenberg-Tarski e da existência da série de Puiseux.

O primeiro, central na teoria dos conjuntos semi-algébricos, afirma que semi-algebricidade é preservada por projeções.

O segundo permite um estudo muito detalhado das raízes de equações polinomiais em duas variáveis complexas.

Tais resultados são centrais no nosso projeto de mestrado, que versa sobre o problema da divisão de distribuições por polinômios.

2 Objetivo

Sejam Q um **polinômio** em $\mathbb{R}^n$ e N o conjunto de seus zeros.

Vamos assumir que existe $\xi \in N$ com $|\xi| \leq 1$.

A desigualdade que queremos provar é a seguinte:

Teorema 2.1 *Existem constantes positivas C e μ tais que*

$$C.d(\xi, N)^{\mu} \leq |Q(\xi)|, \forall \xi : |\xi| \leq 1$$

Para $n = 1$ esse resultado é bastante simples.

3 Teorema de Seidenberg-Tarski

Definição 3.1 *Dizemos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é* ***semi-algébrico*** *se ele é uma reunião finita de intersecções finitas de conjuntos do tipo $\{x : P(x) > 0\}$ e $\{x : Q(x) = 0\}$, onde P e Q são polinômios.*

- **Intersecções** e **reuniões** finitas de conjuntos semi-algébricos são conjuntos semi-algébricos
- O **complementar** de um conjunto semi-algébrico é semi-algébrico
- O Teorema de Seidenberg-Tarski afirma: a **projeção** de um conjunto semi-algébrico também é semi-algébrico

Teorema 3.1 *Seja A um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{n+m}$. Então a projeção de A em $\mathbb{R}^m$ também é um conjunto semi-algébrico, isto é,*

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \mathit{com}\ (x, y) \in A\}$$

é semi-algébrico.

Definição 3.2 *Dizemos que uma função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é* ***semi-algébrica*** *se seu subgráfico*

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$$

é semi-algébrico.

Corolário 3.1 *Seja A um conjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^{2+n}$. Defina f como*

$$f(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}^n \textit{com } (x, y, z) \in A\},$$

com a convenção de que $f(x) = -\infty$ se não existir tal y. Dessa forma, f é semi-algébrica

Um resultado que utilizaremos é o seguinte:

Teorema 3.2 *Seja f uma função semi-algébrica em $\mathbb{R}$. Então $\mathbb{R}$ pode ser decomposto em um número finito de intervalos (podendo ser só pontos) onde $f = +\infty$, $f = -\infty$, ou f é igual a uma função* ***algébrica*** *e contínua.*

4 Série de Puiseux

Definição 4.1 *Seja* $P(t, z)$ *um polinômio nas* $n + 1$ *variáveis* (t, z)*, onde* $t \in \mathbb{C}$ *e* $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$*. Se*

$$P(t, z) = a_m(z)t^m + a_{m-1}(z)t^{m-1} + \ldots + a_0(z),$$

onde a_m *não é constante igual a zero, o discriminante de* P *é:*

$$\Delta(z) = a_m(z)^{2m-2} \prod_{i<k} (t_i(z) - t_k(z))^2,$$

onde $t_1(z), \ldots, t_m(z)$ *são os* ***zeros*** *do nosso polinômio para* z *fixado.*

Conseguimos provar o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Se* $P(t, z)$ *não tem fatores polinomiais múltiplos, então o discriminante* Δ *é um polinômio em* z *que não se anula identicamente. Além disso, todo ponto onde* $a_m(z)\Delta(z) \neq 0$ *admite uma vizinhança* V *onde existem* m *funções analíticas* $t_1(z), \ldots, t_m(z)$ *tais que*

$$P(t, z) = a_m(z) \prod_{i=1}^{m} (t - t_i(z)), z \in V. \tag{1}$$

Estudando agora o caso $n = 1$ conseguimos afirmar um pouco mais.

Lema 4.2 *Seja $P(t, z)$ um polinômio em duas variáveis da forma*

$$P(t, z) = a_m(z)t^m + a_{m-1}(z)t^{m-1} + \ldots + a_0(z)$$

com $m \geq 1$ e $a_m(z)$ não identicamente nulo.

Então temos (1) para $0 < |z| < \delta$, para algum $\delta > 0$ e para cada j existe um inteiro p tal que t_j é uma função analítica de $z^{1/p}$ quando $0 < |z^{1/p}| < \delta^{1/p}$, e

$$t_j(z) = \sum_{k=N}^{\infty} c_k (z^{1/p})^k, \tag{2}$$

onde $N \in \mathbb{Z}$.

Outra notação para a expressão acima é usualmente

$$t_j(z) = \sum_{k=N}^{\infty} c_k z^{k/p}$$

e uma tal expansão se chama **Série de Puiseux**.

Se escolhermos $c_N \neq 0$, então podemos dizer que em uma vizinhança de 0,

$$t_j(z) = c_N z^{N/p}(1 + o(1)).$$

5 Aplicação

Vamos dar agora uma idéia do nosso resultado principal.

Teorema 5.1 *Sejam Q é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ e N o conjunto de seus zeros. Vamos assumir que existe $\xi \in N$ com $|\xi| \leq 1$. Então existem constantes positivas C e μ tais que*

$$C.d(\xi, N)^{\mu} \leq |Q(\xi)|, \forall \xi : |\xi| \leq 1$$

Demonstração: Pelo Teorema de Seidenberg-Tarski, podemos provar que existe um número finito de conjuntos $H_1, \ldots, H_s$ tais que:

$\tau = |Q(\xi)|$ para algum ξ com $|\xi| \leq 1$ e $d(\xi, N) \geq \delta > 0$,

se, e somente se,

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ com } \tau^2 = |Q(\xi)|^2, \tau > 0, |\xi|^2 \leq 1 \text{ e}$$
$$(\xi, \delta) \in H_j \text{ para algum } j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Precisaremos de mais um Lema para terminar o Teorema.

Lema 5.1 *Dado Q um polinômio em n variáveis que tem algum zero ξ_0 com $|\xi_0| \leq 1$, então a função dada por*

$$T(\delta) = \inf\{|Q(\xi)| : |\xi| \leq 1, d(\xi, N) \geq \delta\}$$

é algébrica para $0 < \delta < \delta_0$, para algum δ_0.

Pelo Corolário 2.1, se colocarmos

$$A = \{(\delta, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{2+n} : \tau > 0, \tau^2 = |Q(\xi)|^2, |\xi|^2 \leq 1,$$
$$\text{e } (\xi, \delta) \in H_j \text{ para algum } 1 \leq j \leq s\},$$

então T é uma função semi-algébrica.

Usando agora o Teorema 2.2 concluimos que T é uma função algébrica para $0 < \delta < \delta_0$, para algum δ_0.

Continuamos a prova da nossa desigualdade. Pelo **Teorema de Puiseux**, podemos escrever, para δ pequeno,

$$T(\delta) = c\delta^{\mu}(1 + o(1));$$

assim, existe δ_0 tal que se $\delta \leq \delta_0$ então

$$\frac{c}{2}\delta^{\mu} \leq T(\delta).$$

Assim o Teorema vale se $0 \leq d(\xi, N) \leq \delta_0$. Só resta então notar que T é crescente.

Referências

[1] Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators II. Berlin: Springer-Verlag. (1983).

[2] Hörmander, L. On the division of distributions by polynomials. Arkiv för Matematik **3**, 555–568 (1958).